Verallgemeinerung einer Formel von Steiner

Müller, Hans Robert

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 29, 1978, S.107-113

Verlag Erich Goltze KG, Göttingen

Verallgemeinerung einer Formel von Steiner

Von **Hans Robert Müller**

Jakob Steiner gab eine Formel zur Berechnung des Flächeninhaltes jenes ebenen Bereiches an, der von der Bahnkurve eines Punktes der Gangebene bei einem geschlossenen Zwanglauf berandet wird.

Bewegliche, wie feste Ebene mögen als *Gauss*'sche Zahlenebenen aufgefaßt werden. Bezogen auf je ein willkürlich gewähltes rechtwinkeliges Achsenkreuz werde ein Punkt X der Gangebene $\underline{E}$ durch die komplexe Zahl $x = x_1 + i\,x_2$ und der augenblicklich sich mit ihm deckende Punkt X′ der Rastebene $\underline{E}'$ durch $x' = x_1' + i\,x_2'$ erfaßt. Der geschlossene Bewegungsvorgang $\underline{B}$, den $\underline{E}$ gegenüber $\underline{E}'$ vollführt, werde durch

$$x' = u' + x\,e^{i\varphi} \tag{1}$$

beschrieben. Hierbei seien $u' = u'(t)$, $\varphi = \varphi(t)$ eine komplexe, bzw. reelle Funktion des reellen Parameters t (= Zeit) und besitze $\underline{B}$ die Periode T und die Drehzahl ν, d.h. es existiere eine kleinste Zahl $T > 0$, sodaß

$$u'(t+T) = u'(t), \tag{2}$$
$$\varphi(t+T) = \varphi(t) + 2\pi\nu. \tag{3}$$

Hierbei sei ν eine ganze Zahl und gelte stets $d\varphi/dt \neq 0$. (Vgl. hierzu etwa [1], [2] im Schriftenverzeichnis!)

Über die Funktion $\varphi(t)$ kann man eine Aussage treffen, wenn man (3) als Differenzengleichung auffaßt. Für sie ist eine spezielle Lösung

$$\varphi^*(t) = \frac{2\pi\nu}{T}\,t$$

unmittelbar angebbar, da ja

$$\varphi^*(t+T) = \varphi^*(t) + 2\pi\nu$$

gilt. Durch Bildung der Differenz gelangt man zu

$$\omega(t) := \varphi(t) - \varphi^*(t) = \varphi(t) - \frac{2\pi\nu}{T}\,t$$

und erkennt die Periodizität von $\omega(t)$:

$$\omega(t+T) = \omega(t).$$

Somit hat $\varphi(t)$ die Gestalt

$$\varphi(t) = \omega(t) + \frac{2\pi\nu}{T}\,t \tag{4}$$

mit einer beliebigen Funktion $\omega(t)$ der Periode T.

In der Folge ist eine Fallunterscheidung $\nu \neq 0$ und $\nu = 0$ vorzunehmen und wird im ersten Fall mehrfach $\nu > 0$ vorausgesetzt. Dies bedeutet keine Einschränkung, denn für $\nu < 0$ gelangt man durch Umkehrung des Durchlaufungssinns, also durch $t = -\hat{t}$ zu einer Funktion

$$\hat{\varphi}(\hat{t}) := \varphi(-\hat{t}) = \omega(-\hat{t}) - \frac{2\pi\nu}{T}\hat{t} =: \hat{\omega}(\hat{t}) - \frac{2\pi\nu}{T}\hat{t}$$

mit $\hat{\varphi}(\hat{t}+T) = \hat{\varphi}(\hat{t}) - 2\pi\nu$

und $\hat{\omega}(\hat{t}+T) = \hat{\omega}(\hat{t})$.

Wird nun der Punkt X in $\underline{E}$ festgehalten ($x = $ konst.), so durchläuft er bei Variieren von $t \in [0,T]$ in $\underline{E}'$ eine geschlossene Bahnkurve $\underline{X}'$ als Ort der nach (1) bestimmten Punkte X' von $\underline{E}'$. Für den Inhalt F_X der von X' umrandeten Fläche gab nun *Steiner* [3], [2] eine einfache Formel an:

$$F_X = \pi\nu\,(x_1^2 + x_2^2 - 2s_1x_1 - 2s_2x_2) + F_0 \quad (\text{für } \nu \neq 0). \tag{5}$$

Die komplexe Schreibweise hierfür lautet mit $\bar{x} = x_1 - i\,x_2$

$$F_X = \pi\nu\,(x\bar{x} - s\bar{x} - \bar{s}x) + F_0. \tag{5'}$$

In ihr bedeutet F_0 den Inhalt des Bereiches, der vom Ursprung 0 ($x = 0$) des Achsenkreuzes von $\underline{E}$ bei $\underline{B}$ in $\underline{E}'$ beschrieben wird. s_j sind die Koordination des *Steiner-Punktes* S von $\underline{E}$, nämlich des Schwerpunktes der Gangpolbahn $\underline{P}$ in $\underline{E}$ bei einer Belegung mit den „Massenelementen" $d\varphi$.

Nach Einführung von

$$u' = -u\,e^{i\varphi} \tag{6}$$

ergeben sich aus (1) für den Gangpol P und den Rastpol P' die Darstellungen in den Achsenkreuzen von $\underline{E}$ bzw. $\underline{E}'$

$$p = u - i\frac{du}{d\varphi}, \quad p' = u' + i\frac{du'}{d\varphi} \tag{7}$$

oder mit (6) auch

$$p' = u' + p\,e^{i\varphi} = (p-u)\,e^{i\varphi}. \tag{7'}$$

Damit wird

$$s = s_1 + i\,s_2 = \frac{\oint p\,d\varphi}{\oint d\varphi}, \tag{8}$$

wobei noch gilt

$$\oint u\,d\varphi = \oint p\,d\varphi, \quad \oint d\varphi = 2\pi\nu. \tag{9}$$

Für $\nu = 0$ sind diese Formeln (5), (5') zu ergänzen durch

$$F_X = F_0 - (x_1P_1 + x_2P_2) = F_0 - \frac{1}{2}(x\,\bar{P} + \bar{x}\,P) \tag{10}$$

mit

$$P = P_1 + i\,P_2 = \oint p\,d\varphi = \oint p_1\,d\varphi + i\oint p_2\,d\varphi.$$

Wir stellen uns nun die Aufgabe, **mit Hilfe der Bahninhalte F_X, F_Y zweier Punkte X, Y von $\underline{E}$ den Inhalt F_Z der Bahn eines beliebigen Punktes Z der Geraden XY darzustellen.** Wir können mittels reeller Parameter λ, μ, für die $\lambda + \mu = 1$ gilt, dann setzen

$$z = \lambda x + \mu y. \tag{11}$$

Wegen (1) ist dann auch

$$z' = \lambda x' + \mu x'. \tag{11'}$$

Schon bei der Herleitung von (5) war der Ausgangspunkt eine auf *Gauss* zurückgehende Formel für die von einem Punkt X′ umfahrene Fläche

$$F_X = \frac{1}{2}\oint (x_1' \, dx_2' - x_2' \, dx_1') = \frac{1}{2}\oint [x', dx']. \tag{12}$$

Das Klammersymbol [a, b] wurde hierin für die Determinante

$$[a, b] := \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

eingeführt. Aus (11′) und (12) folgern wir nun

$$F_Z = \frac{1}{2}\oint [\lambda x' + \mu y', \ \lambda dx' + \mu dy']$$

oder

$$F_Z = \lambda^2 F_X + 2\lambda\mu F_{XY} + \mu^2 F_Y. \tag{13}$$

Hierbei bezeichnen wir

$$F_{XY} := \frac{1}{4}\oint \{[x', dy'] + [y', dx']\} \tag{14}$$

oder

$$F_{XY} = \frac{1}{4}\oint (x_1' \dot{y}_2' - x_2' \dot{y}_1' + y_1' \dot{x}_2' - y_2' \dot{x}_1') \, d\varphi \tag{14'}$$

als *gemischten Bahnflächeninhalt* der Punkte X und Y von $\underline{E}$.

H. Minkowski hatte für zwei Eilinien mit den Stützfunktionen $p_1(\varphi)$ und $p_2(\varphi)$ einen gemischten Flächeninhalt durch

$$F_{12} = F_{21} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (p_1 p_2 - \dot{p}_1 \dot{p}_2) \, d\varphi \tag{15}$$

als eine Art von Polarenbildung zur Flächenformel

$$F_{jj} = F_j = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (p_j^2 - \dot{p}_j^2) \, d\varphi \tag{16}$$

erklärt. Hierbei erscheinen jeweils die Eilinien durch die Geraden

$$x_1 \cos\varphi + x_2 \sin\varphi = p_j(\varphi), \ (j = 1,2) \tag{17}$$

eingehüllt und bedeuten $\dot{p}_j$ die Ableitungen nach φ.

Für diesen gemischten Inhalt gab nun Minkowski eine wichtige Ungleichung an

$$F_{12}^2 - F_{11} F_{22} \geq 0, \tag{18}$$

in der das Gleichheitszeichen nur gilt, wenn die beiden Eilinien ähnlich sind und ähnlich liegen. [4]

Ermittelt man nun aus (17) jeweils die Koordinaten x_j' bzw. y_j' der zum Winkel φ gehörenden Berührungspunkte der Eilinien mit ihren durch (17) dargestellten Tangenten und rechnet die Formel (15) um, so findet man genau die Darstellung (14'). Sie gilt nach ihrer Herleitung aus der *Gauss*'schen Formel somit allgemeiner, d.h. nicht nur für Eilinien.

Zur zweiten Auswertung der Formeln (14), (14') berücksichtigen wir die aus (1) und (6) gefundene Darstellung

$$x' = (x - u)\, e^{i\varphi}, \tag{19}$$

sowie als Ausdruck der Führungsgeschwindigkeit des Punktes X (dargestellt in $\underline{E}'$)

$$dx' = i\,(x' - p')\, d\varphi = i\,(x - p)\, e^{i\varphi}\, d\varphi. \tag{20}$$

Damit nimmt (14) die Gestalt an

$$F_{XY} = \frac{1}{4}\oint \{[(x-u)e^{i\varphi}, i(y-p)e^{i\varphi}] + [(y-u)e^{i\varphi}, i(x-p)e^{i\varphi}]\}\, d\varphi.$$

Da nun

$$[a\, e^{i\varphi}, b\, e^{i\varphi}] = [a, b]$$

und

$$[a, ib] = a_1 b_1 + a_2 b_2 = \frac{1}{2}(a\bar{b} + \bar{a} b)$$

gilt, schließen wir weiter

$$\begin{aligned} F_{XY} = \frac{1}{8}\oint &\{(x-u)(\bar{y}-\bar{p}) + (\bar{x}-\bar{u})(y-p) + (y-u)(\bar{x}-\bar{p}) + \\ &+ (\bar{y}-\bar{u})(x-p)\}\, d\varphi = \\ &\frac{1}{4}\oint (x\bar{y} + \bar{x}y)\, d\varphi - \frac{1}{8}\oint \{(x+y)(\bar{u}+\bar{p}) + (\bar{x}+\bar{y})(u+p)\}\, d\varphi + \\ &+ \frac{1}{4}\oint (u\bar{p} + \bar{u}p)\, d\varphi. \end{aligned}$$

Mit (8) und (9) ergibt sich schließlich, da die Bahnfläche des Ursprungs 0 von $\underline{E}$ den Inhalt

$$F_0 = \frac{1}{4}\oint (u\bar{p} + \bar{u}p)\, d\varphi = \frac{1}{2}\oint (u_1 p_1 + u_2 p_2)\, d\varphi \tag{21}$$

besitzt, die Formel

$$F_{XY} = \frac{\pi\nu}{2}\{x\bar{y} + \bar{x}y - (x+y)\bar{s} - (\bar{x}+\bar{y})s\} + F_0 \tag{22}$$

oder in Koordinatenschreibweise

$$F_{XY} = \pi\nu\,\{x_1 y_1 + x_2 y_2 - (x_1 + y_1)s_1 - (x_2 + y_2)s_2\} + F_0. \tag{22'}$$

Man erhält somit wiederum die „Polarform" der Steinerschen Formel (5) und erkennt: $F_{XX} = F_X$, $F_{XY} = F_{YX}$.

Nach (13) kann man somit **die Bahnfläche F_Z eines beliebigen Punktes Z der Geraden XY finden, wenn man für die zwei verschiedenen Punkte X, Y die Bahnflächen F_X und F_Y, sowie deren gemischte Bahnfläche F_{XY} kennt.**

Wir denken uns nun in $\underline{E}$ das Koordinatensystem so verschoben, daß der Ursprung 0 in den *Steiner*-Punkt S fällt. Kennzeichnend hierfür ist $s = 0$ oder

$$\oint p \, d\varphi = \oint u \, d\varphi = 0.$$

Unsere Formeln für die Bahnflächen vereinfachen sich nun wegen $F_0 = F_S$:

$$\left.\begin{aligned} F_X &= \pi\nu\,(x_1^2 + x_2^2) + F_S, \\ F_{XY} &= \pi\nu\,(x_1y_1 + x_2y_2) + F_S. \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Für $\nu > 0$ entnehmen wir daraus drei Ungleichungen: Einmal ist unmittelbar einzusehen, daß $F_X > F_S$ für $X \neq S$ und

$$F_X - 2\,F_{XY} + F_Y > 0 \quad \text{für } X \neq Y \tag{24}$$

gilt*). Ferner folgern wir aus der Schwarzschen Ungleichung

$$(x_1^2 + x_2^2)\,(y_1^2 + y_2^2) - (x_1y_1 + x_2y_2)^2 = (x_1y_2 - x_2y_1)^2 \geq 0$$

die Beziehung

$$(F_X - F_S)\,(F_Y - F_S) - (F_{XY} - F_S)^2 \geq 0; \tag{25}$$

dies läßt sich umformen in

$$F_XF_Y - F_{XY}^2 \geq F_S\,(F_X - 2\,F_{XY} + F_Y). \tag{25'}$$

Für $F_S > 0$ gilt somit wegen (24)

$$F_X\,F_Y - F_{XY}^2 > 0 \tag{26}$$

Es ist bemerkenswert, daß die *Minkowski*sche Ungleichung (18) für (positive) Bahnflächeninhalte mit $\nu > 0$ nicht erfüllt ist, ja sich in ihr das Ungleichheitszeichen umkehrt.

In (25) gilt das Gleichheitszeichen, wenn die Punkte X,Y und S kollinear sind.

Für $\nu < 0$ lassen sich ähnliche Abschätzungen vornehmen. Das Ungleichheitszeichen kehrt sich hierbei meist um.

Im bisher ausgeschlossenen Fall $\nu = 0$, für den nach (3) und (4) $\varphi(t)$ die Periode T besitzt, existiert kein *Steiner*-Punkt S im Endlichen. Die Berechnung des gemischten Flächeninhaltes nach (14) reduziert sich auf

$$F_{XY} = \frac{1}{4}\oint (u\bar{p} + \bar{u}p)\,d\varphi - \frac{1}{8}\oint \{(x + y)\,(\bar{u} + \bar{p}) + (\bar{x} + \bar{y})\,(u + p)\}\,d\varphi.$$

Daher finden wir mit (9)

$$F_{XY} = F_0 - \frac{1}{4}\{(x + y)\,\bar{P} + (\bar{x} + \bar{y})\,P\} \tag{27}$$

*) Aus (23) ergibt sich

$$F_X - 2\,F_{XY} + F_Y = \pi\nu\,\{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2\} = \pi\nu\,d^2$$

mit d als Abstand der Punkte X,Y. Damit gelangt man auch zu einer Darstellung von F_{XY}, nämlich

$$F_{XY} = \frac{1}{2}\,(F_X + F_Y - \pi\nu\,d^2).$$

oder

$$F_{XY} = F_0 - \frac{1}{2}\{(x_1 + y_1) P_1 + (x_2 + y_2) P_2\}, \tag{27'}$$

wodurch (10) ergänzt wird.

Man bestätigt nun sofort

$$F_X - 2 F_{XY} + F_Y = 0 \tag{28}$$

und wegen

$$4(F_{XY}^2 - F_X F_Y) = (F_X - F_Y)^2 = \{(x_1 - y_1) P_1 + (x_2 - y_2) P_2\}^2 \geqq 0$$

die Gültigkeit der *Minkowski*schen Ungleichung in der Form

$$F_{XY}^2 - F_X F_Y \geqq 0 \tag{29}$$

Das Gleichheitszeichen in (29) wird für Punktepaare X,Y angenommen, die auf Geraden (senkrecht zur Richtung von P) mit Gleichungen

$$P_1 z_1 + P_2 z_2 = \text{konst.}$$

liegen.

Nun noch einige Bemerkungen zu unseren Abschätzungen:

Gilt im besonderen $F_X = F_Y$, jedoch $X \neq Y$, so liegen in $\underline{E}$ die beiden betrachteten Punkte auf einem Kreis um S und umlaufen bei $\underline{B}$ mit $\nu \neq 0$ inhaltsgleiche Bereiche in $\underline{E}'$. Das kann auch so geschehen, daß X und Y auf der gleichen Bahnkurve sich bewegen.

(24) führt dann zu

$$F_X - F_{XY} > 0.$$

Mit (25′) folgert man noch

$$F_X + F_{XY} \geqq 2 F_S.$$

Für Bewegungsvorgänge $\underline{B}$ mit $\nu = 0$ gilt nach (28) bei $F_X = F_Y$ und $X \neq Y$ die Übereinstimmung $F_{XY} = F_X$ und in (29) das Gleichheitszeichen.

Die Bedeutung der Terme in (24) und (26) kommt auch durch folgende Betrachtung zum Ausdruck: In der Darstellung (11) eines Punktes Z einer Geraden XY der Gangebene $\underline{E}$ können wir wegen $\lambda + \mu = 1$ einen der Parameter, etwa λ eliminieren.

Somit gelangen wir zu

$$z = (1 - \mu) x + \mu y.$$

Dann geht (13) in

$$F_Z = (1 - \mu)^2 F_X + 2\mu (1 - \mu) F_{XY} + \mu^2 F_Y$$

über und legt die Frage nahe, für welche Punkte $Z = Z_0$ der Geraden XY der Inhalt F_Z einen extremen (kleinsten) Wert annimmt.

Aus $dF_Z/d\mu = 0$ ergibt sich im Fall $\nu > 0$ für μ der Wert

$$\mu_0 = \frac{F_X - F_{XY}}{F_X - 2\,F_{XY} + F_Y},$$

für den nach (24)

$$\frac{d^2 F_Z}{d\mu^2} = 2\,(F_X - 2\,F_{XY} + F_Y) > 0$$

wird. Der Punkt Z_0 der Geraden XY mit

$$z_0 = (1 - \mu_0)\,x + \mu_0\,y$$

gehört also zum minimalen Bahnflächeninhalt

$$F_{Z_0} = \frac{F_X F_Y - F_{XY}^2}{F_X - 2\,F_{XY} + F_Y} > 0.^{*)}$$

Punktepaare X,Y mit konstantem Skalarprodukt $x_1 y_1 + x_2 y_2$ führen zu gleichem gemischten Bahnflächeninhalt F_{XY}. Wird einer der Punkte, etwa Y festgehalten, so liegen die anderen Punkte X auf einer Geraden von E, senkrecht zur Richtung von y.

Literaturverzeichnis

[1] H. R. Müller, Kinematik (Sammlung Göschen Bd. 584/584 a), Berlin 1963.
[2] W. Blaschke – H. R. Müller, Ebene Kinematik (Math. Einzelschr. Bd. 5), München 1956.
[3] J. Steiner, Gesammelte Werke, Berlin 1881/82.
[4] W. Blaschke, Kreis und Kugel, Berlin 1916/1956.

*) Z_0 ist auch Fußpunkt des Lotes aus S auf die Gerade XY.